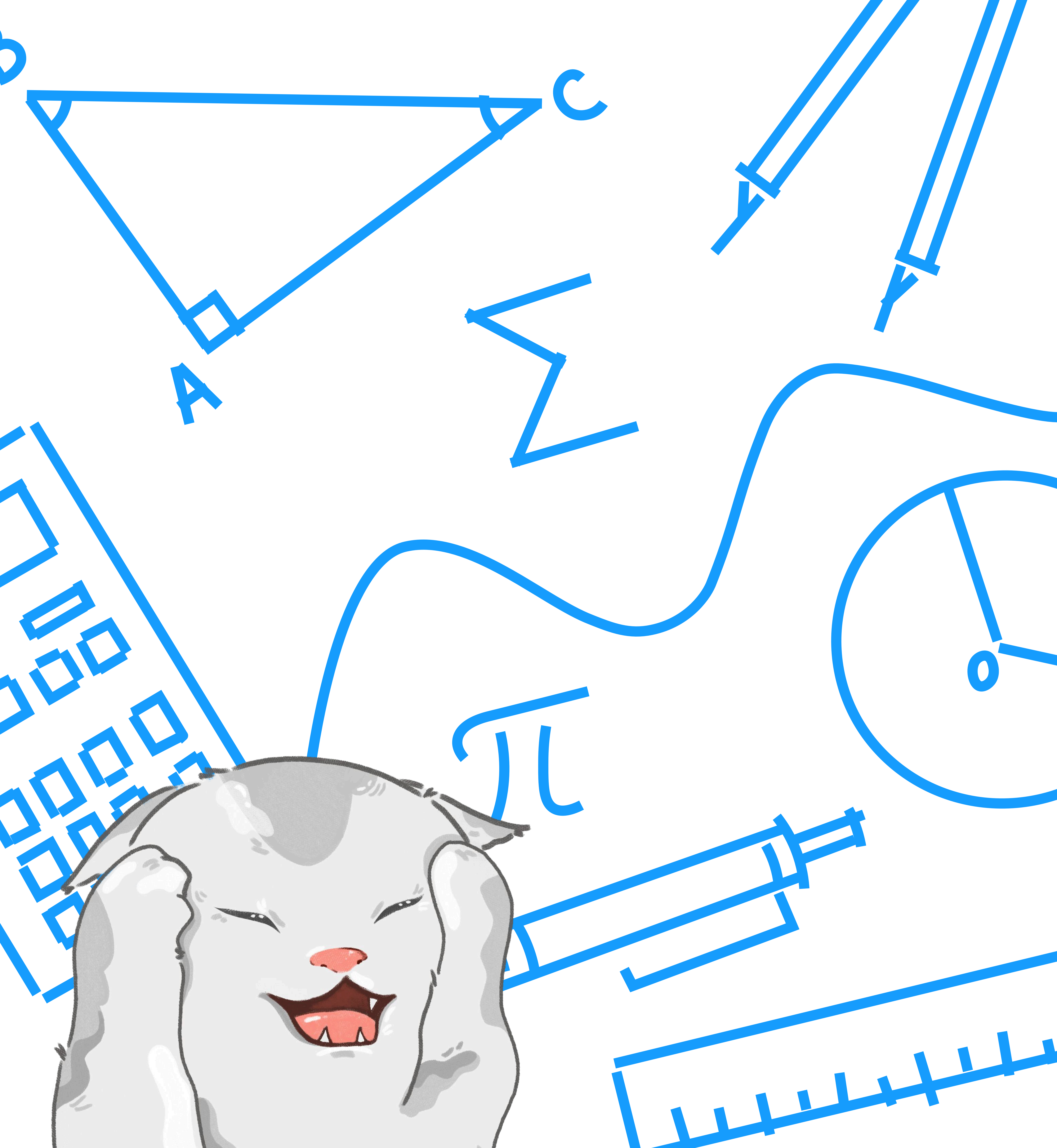
Математика 10 класс | Дядя Артем

100Б

ТЕОРИЯ.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ



Линейные уравнения

Общий вид: $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, x — переменная.

Алгоритм решения:
1. Перенести слагаемые с x в одну часть, числа — в другую.
2. Привести подобные.
3. Разделить обе части уравнения на коэффициент при x (a).

Количество корней:
Всегда один корень: $x = -\frac{b}{a}$.

Пример:
$5x - 10 = 0 \to 5x = 10 \to x = 2$.

Квадратные уравнения

Общий вид: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Основные методы решения:
1. Через дискриминант (универсальный):
   - Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.
   - Корни:
     $D > 0 \to$ Два корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
     $D = 0 \to$ Один корень (два совпадающих):
     $x = \frac{-b}{2a}$
     $D < 0 \to$ Нет действительных корней.
2. По теореме Виета (для приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$):
   $x_1 + x_2 = -p$,
   $x_1 \cdot x_2 = q$.
   Удобно для подбора корней.
3. Выделение полного квадрата.
4. Разложение на множители (если удается)

Пример:
$x^2 - 5x + 6 = 0 \to D = 25 - 24 = 1 \to x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

Дробно-рациональные уравнения

Общий вид: Уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Алгоритм решения:

1. Найти ОДЗ (Область Допустимых Значений): Знаменатель не может быть равен нулю.
   $Q(x) \neq 0$. Выписать запрещенные значения x.
2. Перенести все слагаемые в одну часть, привести к общему знаменателю.
3. Уравнять числитель к нулю: $P(x) = 0$.
4. Решить полученное уравнение (часто линейное или квадратное).
5. Исключить корни, не входящие в ОДЗ (те, которые обращают знаменатель в ноль).

Ключевое правило: Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

Пример:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$$

ОДЗ: $x \neq 2$.
Числитель: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -2$.
Исключаем $x = 2$ (нарушает ОДЗ).
Ответ: $x = -2$.

Простые иррациональные уравнения (с радикалами)

Общий вид: Уравнение, содержащее переменную под знаком корня (радикала).
Простейший случай: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Основной метод — возведение в степень

Алгоритм для уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$:

1. Найти ОДЗ (часто критично для корней четной степени):
   - Подкоренное выражение ≥ 0 : $f(x) \geq 0$.
   - Для правой части: если корень четной степени ($\sqrt{}$, $\sqrt{}$), то $g(x) \geq 0$.
2. Возвести обе части в квадрат (или соответствующую степень), чтобы избавиться от корня: $f(x) = [g(x)]^2$.
3. Решить полученное уравнение (обычно линейное или квадратное).
4. Сделать проверку полученных корней, подставив в исходное уравнение, или отобрать те, которые удовлетворяют ОДЗ и условию $g(x) \geq 0$.

Важно: Возведение в четную степень может привести к посторонним корням, поэтому проверка/учет условий обязательна.

Пример:

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

Условия: $x + 1 \geq 0$ → $x \geq -1$, и $x - 1 \geq 0$ → $x \geq 1$. Итого: $x \geq 1$.

Возводим в квадрат:

$x + 1 = (x-1)^2$ → $x + 1 = x^2 - 2x + 1$ → $x^2 - 3x = 0$ → $x(x-3) = 0$.

Корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.
$x_1 = 0$ не удовлетворяет условию $x \geq 1$ → посторонний.
Ответ: $x = 3$.