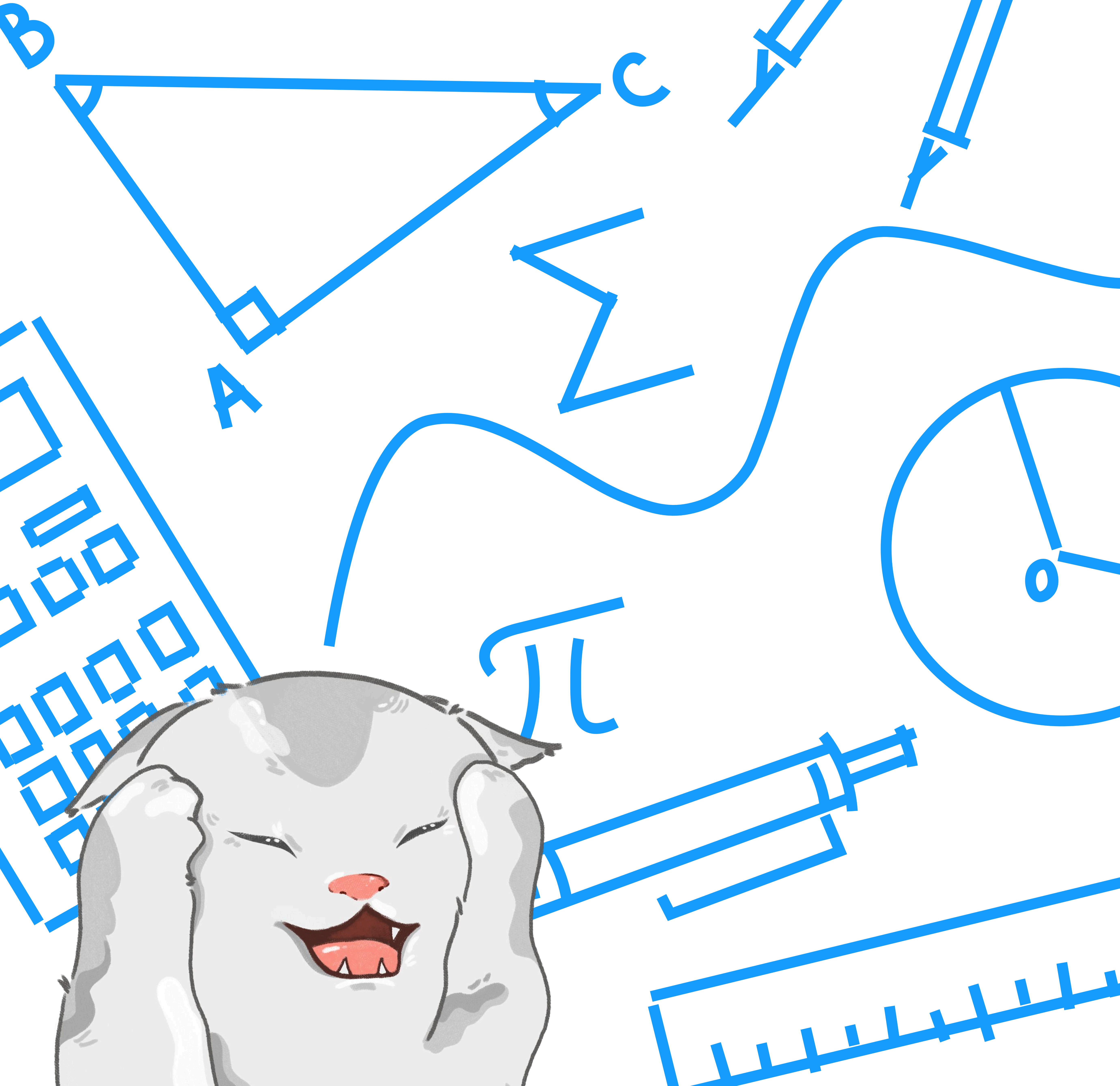
Математика 10 класс | Дядя Артем

100Б

# ТЕОРИЯ.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ, СМЕСИ И СПЛАВЫ



## Основные понятия и формулы

$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

Формула процента от числа:

$$A \cdot \left( \frac{P}{100} \right)$$

где $A$ — число,
$P$ — количество процентов.

Формула процента по части:

$$\left( \frac{\text{Часть}}{\text{Целое}} \right) \cdot 100\%$$

Увеличение на $P\%$:

$$A \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) \text{ или } A + A \cdot \frac{P}{100}$$

Уменьшение на $P\%$:

$$A \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right) \text{ или } A - A \cdot \frac{P}{100}$$

## Ключевой принцип: Работа с множителями

Самый важный навык! Замени проценты на десятичный множитель.

- Увеличить на $20\%$ $\rightarrow$ умножить на $1.2$ (т.к. $100\% + 20\% = 120\% = 1.2$)
- Уменьшить на $15\%$ $\rightarrow$ умножить на $0.85$ (т.к. $100\% - 15\% = 85\% = 0.85$)
- Увеличить на $5\%$ $\rightarrow$ умножить на $1.05$
- Уменьшить на $1\%$ $\rightarrow$ умножить на $0.99$

Пример: Цена товара $1000$ руб. Сначала повысили на $10\%$, затем понизили на 10%. Какая окончательная цена?

- Неправильно: $1000 + 10\% - 10\% = 1000$. Сумма изменений не равна нулю!
- Правильно (через множители):
  a. После повышения: $1000 \cdot 1.1 = 1100$
  b. После понижения: $1100 \cdot 0.9 = 990$
     Ответ: $990$ руб.

## Типовые схемы задач

**Схема 1: "Два изменения подряд" (Кредиты, вклады, изменение цены)**
Используется, когда величина меняется несколько раз на разные проценты.
Общая формула: $S$конечное $=$ $S$начальное $\cdot\ k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot kn$
где $k_1,\ k_2,\ ...,\ kn$ — множители изменений.
Пример (Задача 15 из ЕГЭ): Вклад планируется открыть на $4$ года. Первоначальный вклад $10$ млн руб. В конце каждого года банк увеличивает вклад на $10\%$, а затем вкладчик дополнительно вносит на счет $x$ млн руб. Найдите наименьший х, при котором через $4$ года вклад будет не менее $30$ млн руб.
Решение:

1. Конец 1-го года: $(10 \cdot 1.1 + x)$
2. Конец 2-го года: $((10 \cdot 1.1 + x) \cdot 1.1 + x)$
3. Раскрываем скобки и продолжаем для 4 лет. Получаем уравнение/неравенство:
   $10 \cdot 1.1^4 + x \cdot (1.1^3 + 1.1^2 + 1.1 + 1) > = 30$
4. Считаем: $10 \cdot 1.4641 + x \cdot (1.331 + 1.21 + 1.1 + 1) > = 30$
   $14.641 + x \cdot 4.641 >= 30$
   $$x > = \frac{(30 - 14.641)}{4.641} \approx 3.3$$
5. Ответ: $x = 4$ (так как $x$ — целое число миллионов).

**Схема 2: "Сложные проценты"**
Формула для расчета итоговой суммы, когда проценты начисляются на наращенную сумму.

Формула: $S = A \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

где $A$ — начальная сумма, $P$ — процент за период, $n$ — количество периодов.
Пример: Вклад $100\ 000$ руб. под $10\%$ годовых с ежегодной капитализацией на $3$ года.
$S = 100\ 000 \cdot (1 + 0.1)^3 = 100\ 000 \cdot 1.331 = 133\ 100$ руб.

**Схема 3: "Задачи на концентрацию и сплавы/смеси"**

- Концентрация $= \left( \dfrac{\text{Масса вещества}}{\text{Масса смеси}} \right) \cdot 100\%$
- Масса вещества $= \left( \dfrac{\text{Концентрация} \cdot \text{Масса смеси}}{100\%} \right)$

Алгоритм решения:
1. Определить, что является "чистым веществом" (например, содержание меди, кислоты).
2. Составить уравнение на основе баланса этого вещества "до" и "после" смешивания/изменения.

Пример: Имеется $2$ кг $15\%$-го раствора соли. Сколько кг $25\%$-го раствора надо добавить, чтобы получить $20\%$-й раствор?

Решение:
1. "Вещество" — чистая соль.
2. Было соли: $2 \cdot 0.15 = 0.3$ кг
3. Добавили соли: $x \cdot 0.25$ (где x — масса $25\%$-го раствора)
4. Стало соли: $(2 + x) \cdot 0.20$
5. Уравнение: $0.3 + 0.25x = (2 + x) \cdot 0.2$
   $0.3 + 0.25x = 0.4 + 0.2x$
   $0.05x = 0.1$
   $x = 2$

Ответ: $2$ кг.

**Схема 4: "Задачи на сухофрукты" (Влажность)**
Суть задачи: Свежие фрукты/грибы/трава содержат воду. При сушке вода испаряется, но масса сухого вещества не меняется. Меняется только его процентное содержание в общей массе.

- Влажность — это процентное содержание воды.
- Сухое вещество — это то, что остается после полного испарения воды.

Ключевая формула и модель:

Масса(свежая) $\cdot \left(1 - \dfrac{\text{W}\text{свежая}}{100}\right) =$ Масса(сухая) $\cdot \left(1 - \dfrac{\text{W}\text{сухая}}{100}\right)$

где $\text{W}$ — влажность в процентах.

Фундаментальное уравнение:
Масса(свежая) · Доля_сухого_вещества_свежих
= Масса(сухая) · Доля_сухого_вещества_сухих

**Пример 1: Классическая задача**
Свежие грибы содержат $90\%$ воды, а сушёные — $15\%$. Сколько получится сушёных грибов из $10$ кг свежих?
Решение (через сухое вещество):
1. Определяем доли сухого вещества:
   - В свежих: $100\%$ - $90\%$ $= 10\%$ или $0.1$
   - В сухих: $100\%$ - $15\%$ $= 85\%$ или $0.85$
2. Масса сухого вещества не меняется. Составляем уравнение:
   Масса_свежих $* \ 0.1 =$ Масса_сухих $* \ 0.85$
3. Подставляем известное значение (массу свежих):
   $10 \ * \ 0.1 =$ Масса_сухих $* \ 0.85$
   $1 =$ Масса_сухих $* \ 0.85$
4. Находим массу сухих:
   $$\text{Масса\_сухих} = \frac{1}{0.85} \approx 1.176 \text{ кг}$$

Ответ: $\approx 1.2$ кг.

.