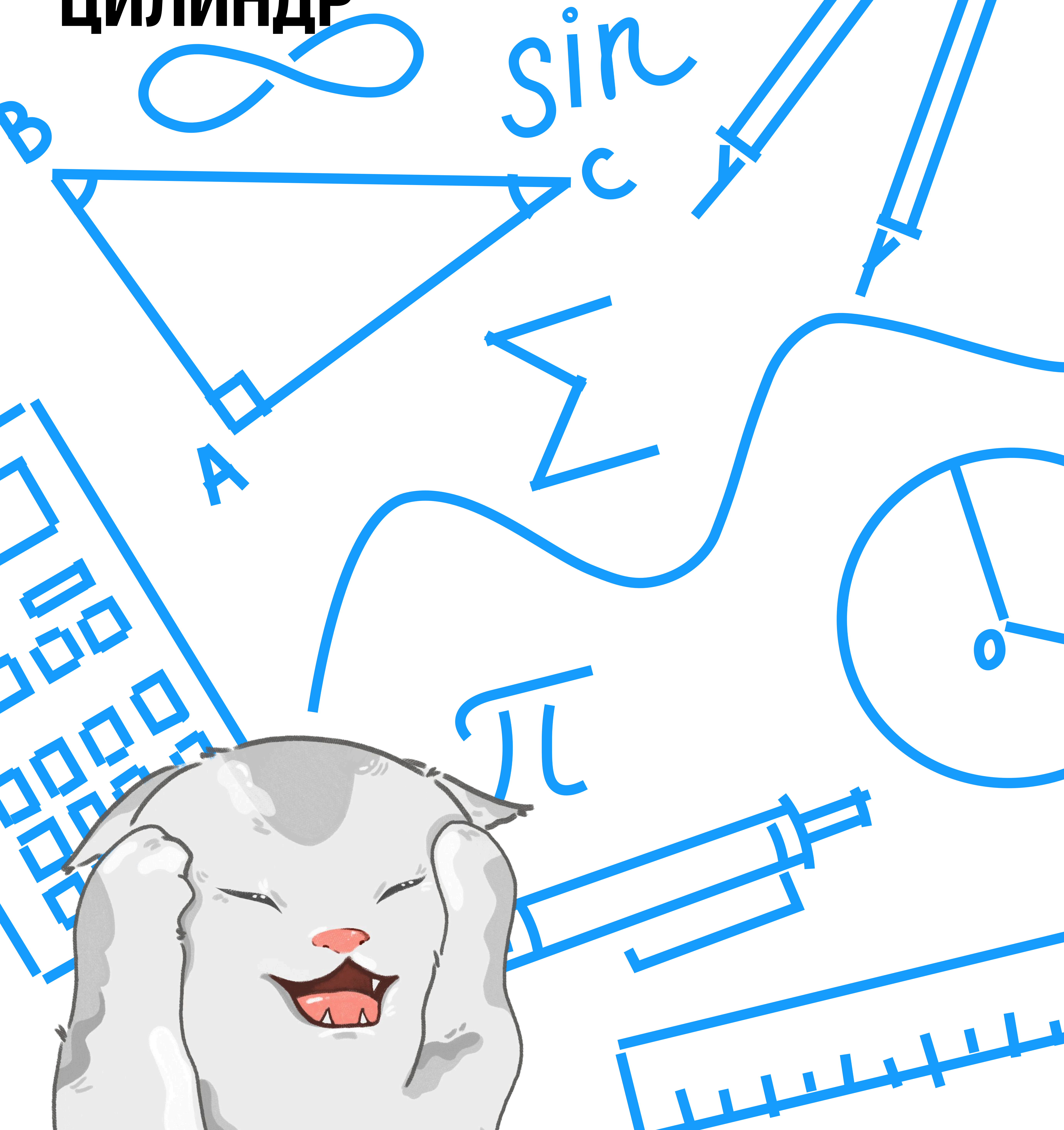
100Б

ТЕОРИЯ.

ОСНОВЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ЦИЛИНДР

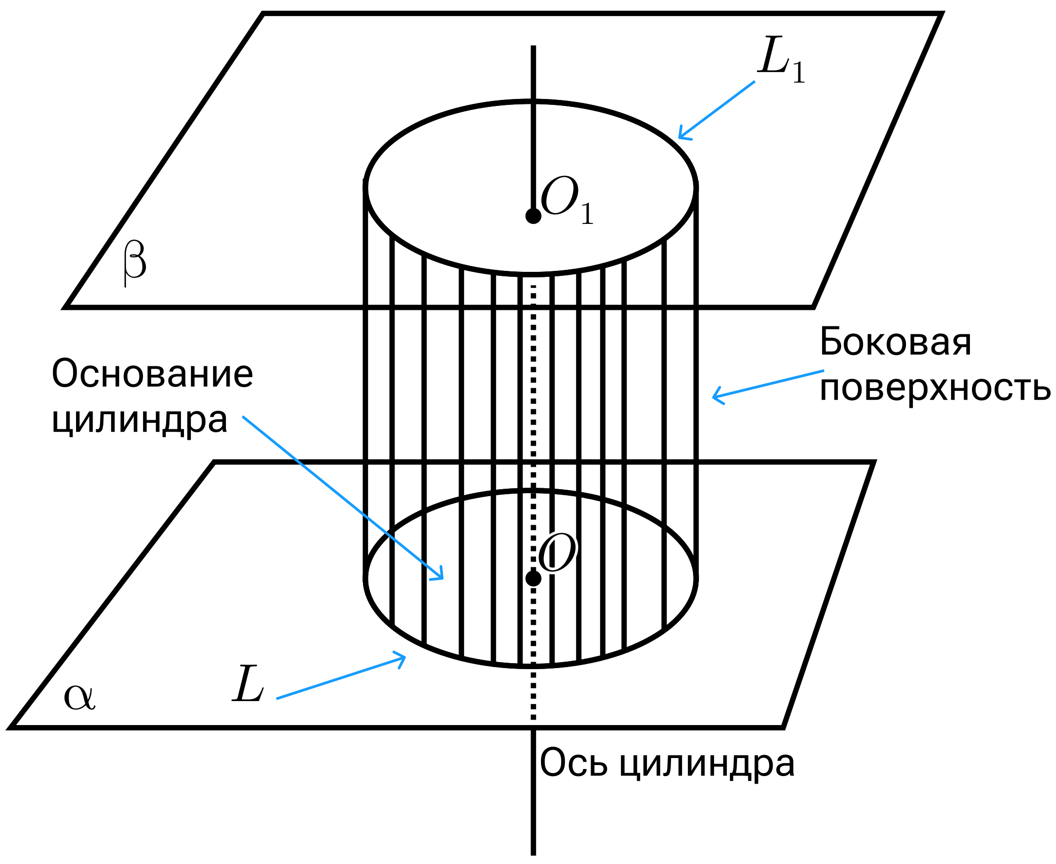


Цилиндр

Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и окружность L с центром O и радиусом r, расположенную в плоскости α. Через каждую точку окружности L проведём прямую, перпендикулярную плоскости α. Отрезки этих прямых, заключённые между плоскостями α и β, образуют цилиндрическую поверхность. Сами отрезки называются образующими цилиндрической поверхности.

Определения

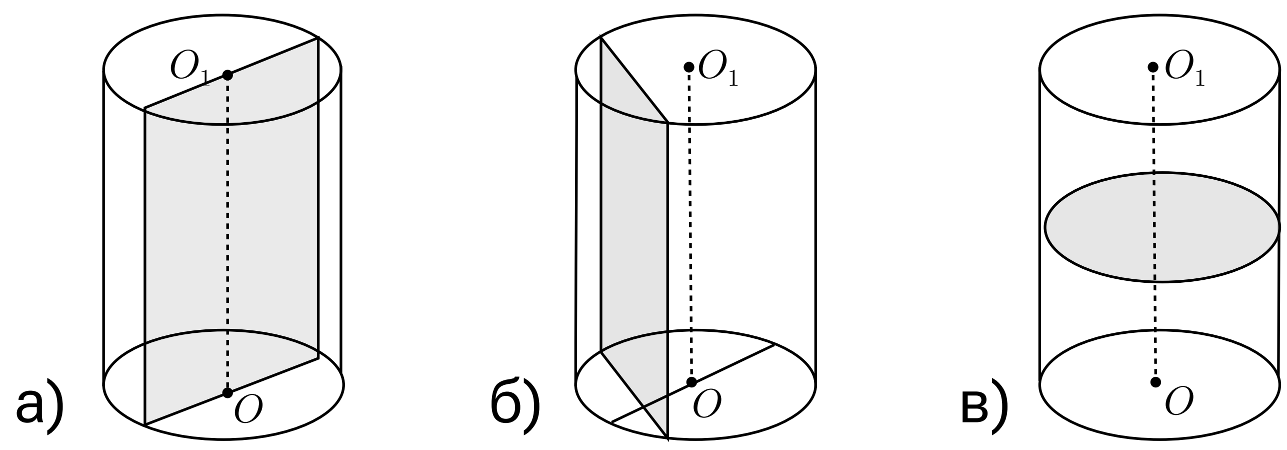
1. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром**.
2. Тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из своих сторон, называется **цилиндром**.



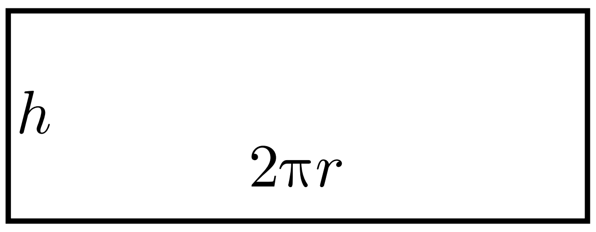
Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги – **основаниями цилиндра.**
Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, прямая OO_1 – **осью цилиндра**.
Все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется **высотой цилиндра**, а радиус основания – **радиусом цилиндра**.

Сечения цилиндра

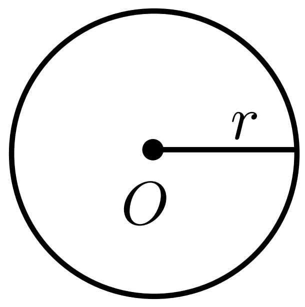
1. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение называется **осевым** и имеет форму прямоугольника.
2. Если секущая плоскость параллельна оси цилиндра, то сечение является **прямоугольником**.
3. Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является **кругом**.



Образующая (высота цилинра)



Длина окружности L

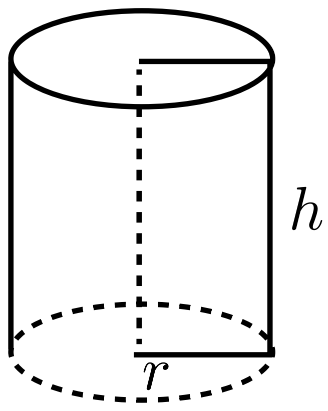


2 основания

$$S_{\text{бок. пов}} = 2\pi r h$$

$$S_{\text{полн. цил}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$$

Теорема. Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

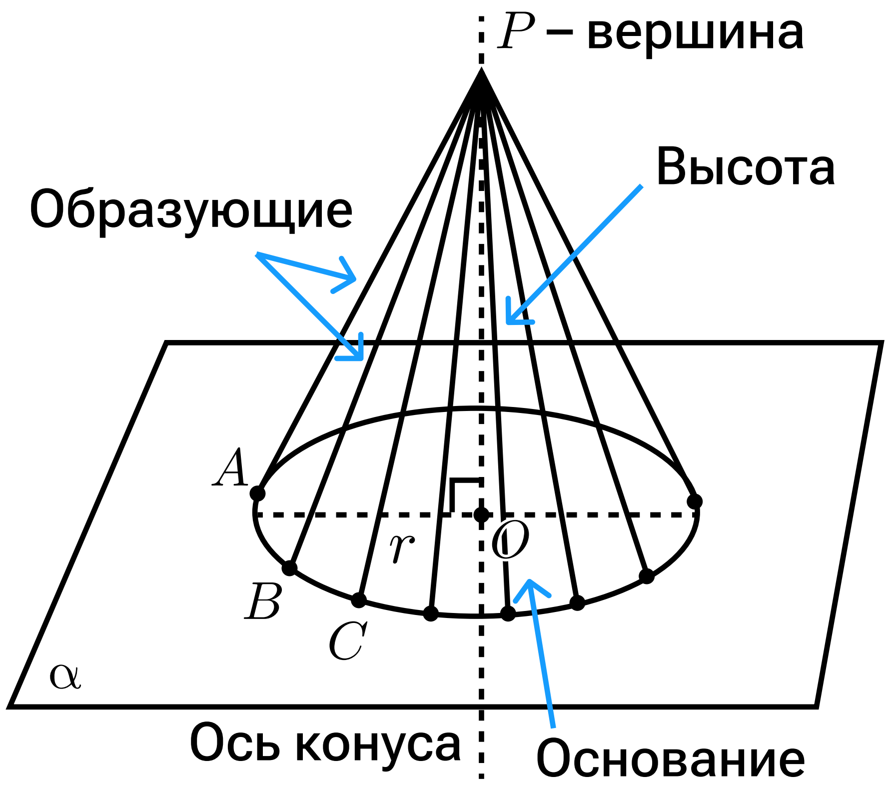


$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 h$$

Конус. Усечённый конус

Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP, перпендикулярную плоскости этой окружности. Каждую точку окружности соединим отрезком с точкой P. Поверхность, образованная этими отрезками, называется конической поверхностью, а сами отрезки – образующими конической поверхности.



Определения

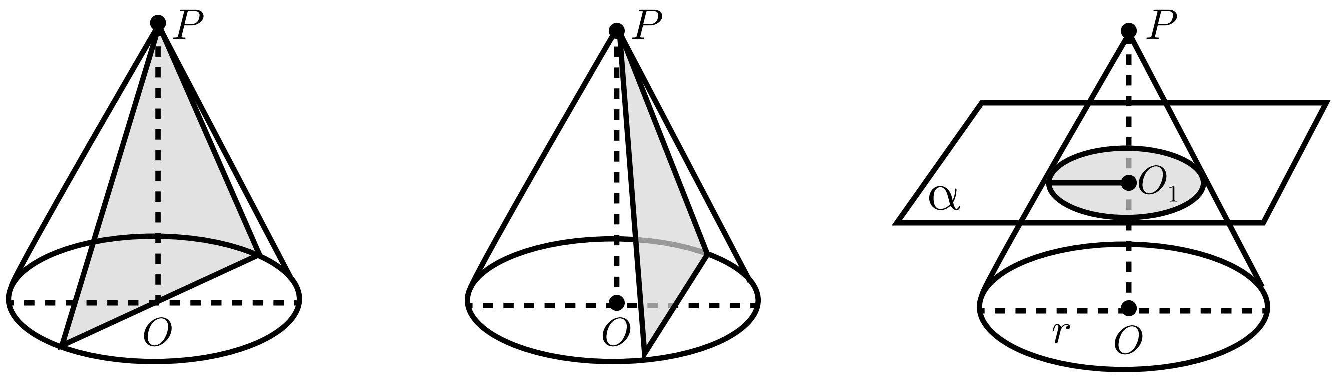
1. Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется **конусом**.
2. Тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов, называется **конусом.**

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг – **основанием конуса**. Точка P называется **вершиной конуса**, а образующие конической поверхности – **образующими конуса**.

Все образующие конуса равны друг другу. Прямая OP, проходящая через центр основания и вершину, называется **осью конуса**. Отрезок OP называется **высотой конуса.**

Сечения конуса

1. Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение называется **осевым** и представляет собой **равнобедренный треугольник,** основание которого – **диаметр основания конуса**, а боковые стороны – **образующие**.
2. Если секущая плоскость проходит через вершину и хорду основания, то сечение является **равнобедренным треугольником**.
3. Если секущая плоскость перпендикулярна оси DP конуса, то сечение представляет собой круг с центром O_1, расположённым на конусе.



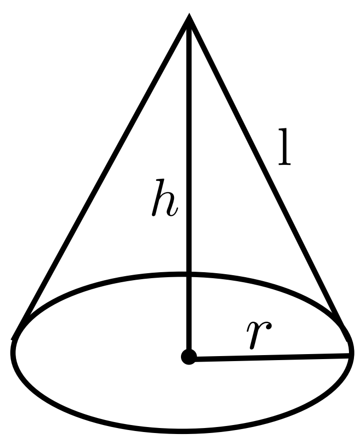
Площадь поверхности конуса

$S_{\text{бок.}} = 2\pi r l$

$S_{\text{полн.}} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi r(l + r)$

Теорема. Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$V_{\text{кон}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h \qquad V_{\text{кон}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$



Усечённый конус.
Если провести секущую плоскость перпендикулярно оси конуса, то она разобьёт конус на две части: одна из них — конус, а другая — **усечённый конус**.

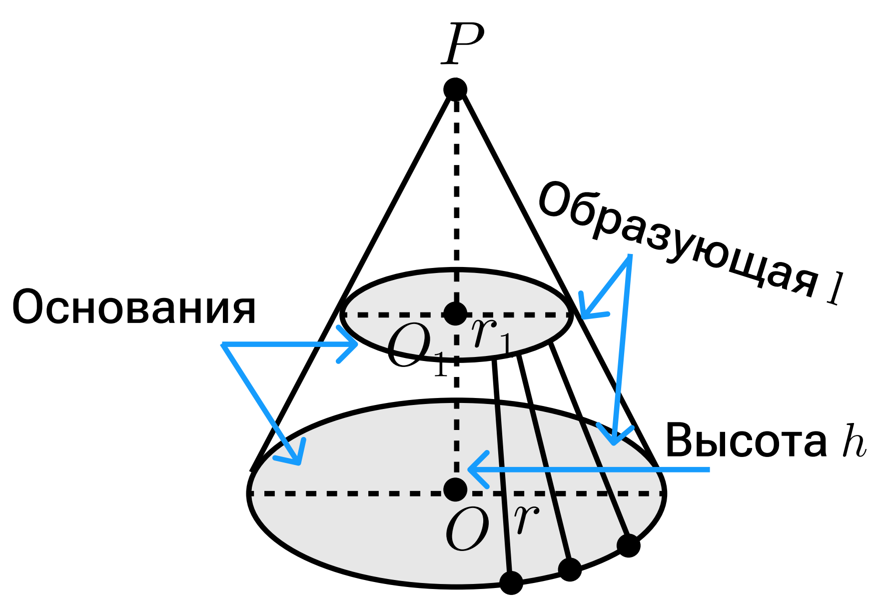
Усечённый конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной основанию.

$S_{\text{бок.}} = \pi(r + r_1)\, l$

$S_{\text{полн.}} = \pi(r + r_1)\, l + \pi r^2 + \pi r_1^2$

Объём усечённого конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле:

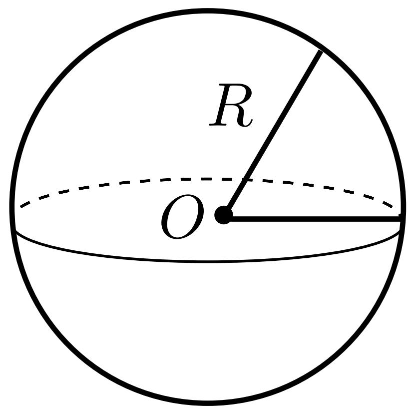
$V_{\text{усеч.}} = \dfrac{1}{3} h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right) \qquad V_{\text{усеч.}} = \dfrac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r_1^2 + r r_1\right)$



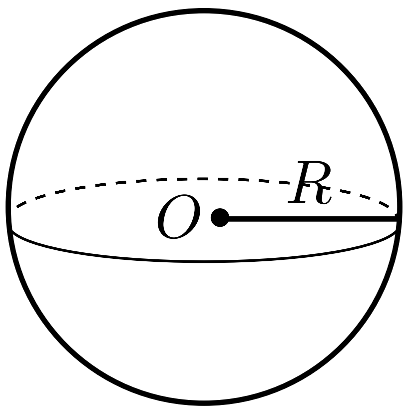
Сфера и шар

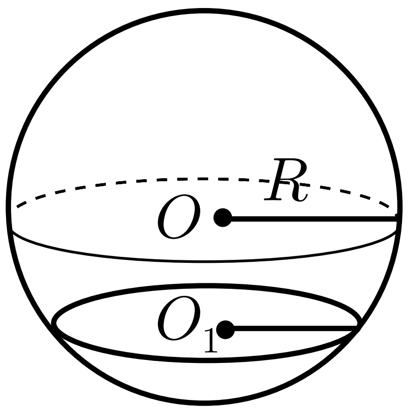
Определения
1. **Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром сферы**. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется **диаметром сферы**.
2. Телом, полученное вращением полуокружности вокруг её диаметра, называется **сферой**.

Определения
1. Телом, ограниченным сферой, называется **шаром**.
2. Телом, полученное вращением полукруга вокруг его диаметра, называется **шаром**.
Центр, радиус и диаметр сферы называются также **центром, радиусом и диаметром шара**.
Очевидно, что шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R, и не содержит других точек



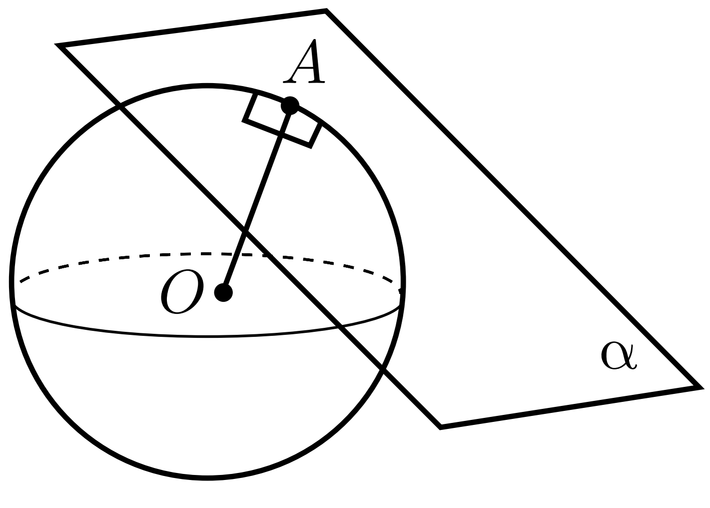
Сечения сферы
1. Если секущая плоскость проходит через центр сферы, то сечение — это **окружность с радиусом, равным радиусу сферы**.
2. Если секущая плоскость не проходит через центр сферы, то сечение является **окружностью с радиусом, меньшим радиуса сферы.**





Сечения шара получаются аналогично, но являются кругами.
Определения. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка называется **точкой касания плоскости и сферы**.

Теорема. Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен касательной плоскости.



$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$$

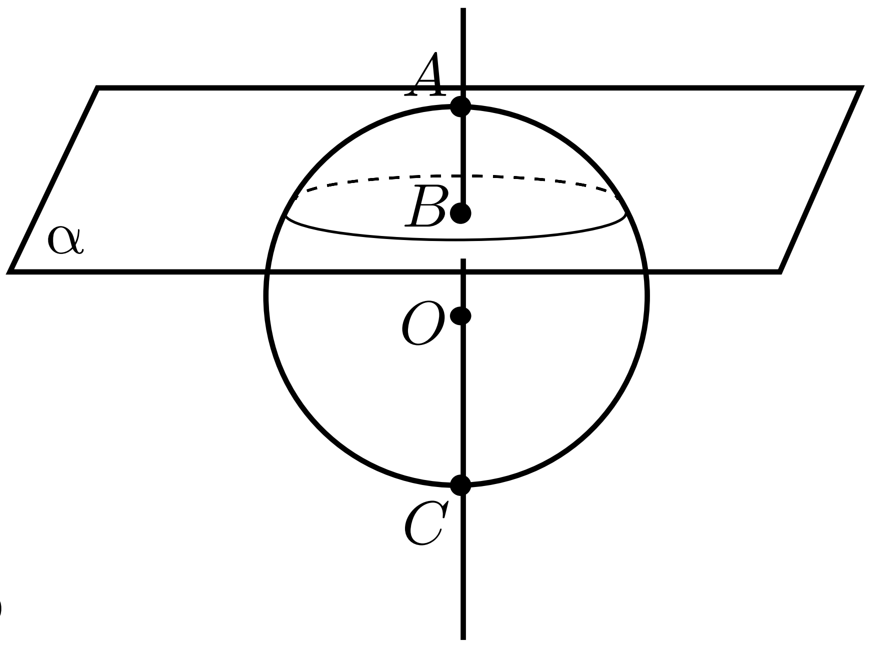
$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Части шара.

1. **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. Секущая плоскость разделяет шар на два шаровых сегмента.

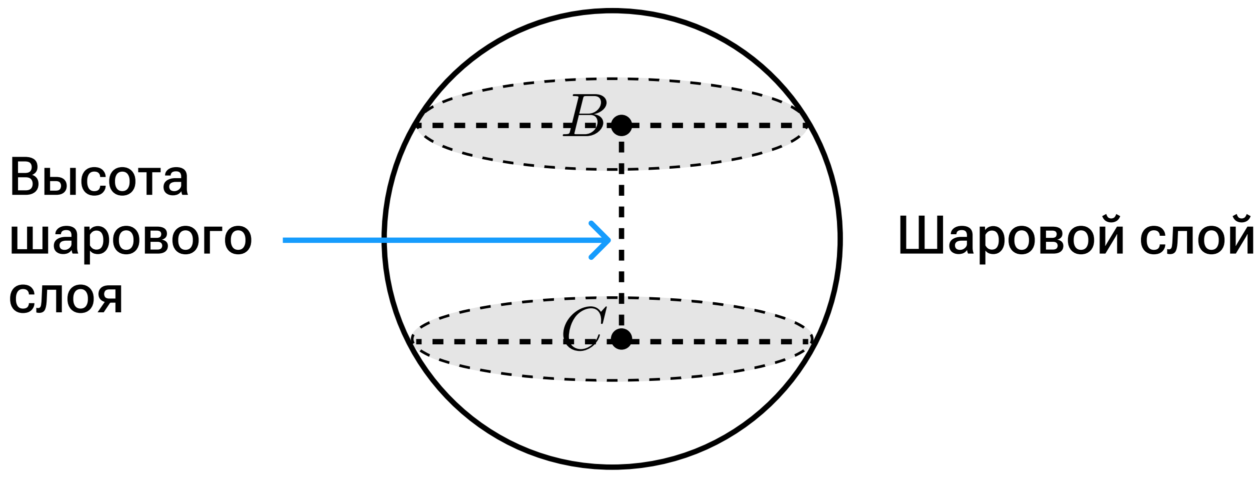
Круг, получившийся в сечении, называется основанием шаровых сегментов. Длины отрезков AB и BC называются **высотами сегментов**.

$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$$

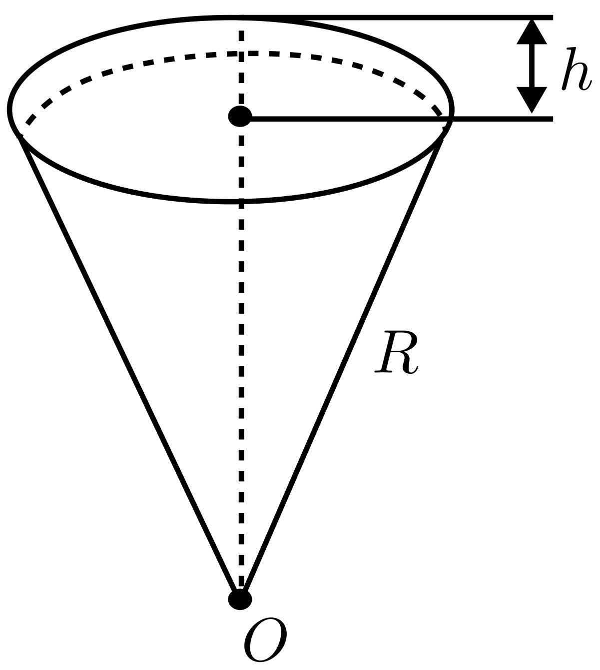


где R – радиус шара; h – высота сегмента.

2. **Шаровым слоем** называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями. Круги, получившиеся в сечении, называются **основаниями шарового слоя**, а расстояние между плоскостями – **высотой шарового слоя.**



$$V_{\text{шар. слой}} = V_{\text{шара}} - V_{1\,\text{шар. сегм}} - V_{2\,\text{шар. сегм}}$$



3. **Шаровым сектором** называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей одну из ограничивающих круговой сектор радиусов.

Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса:

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1$$

где R – радиус шара; h – высота шарового сегмента.