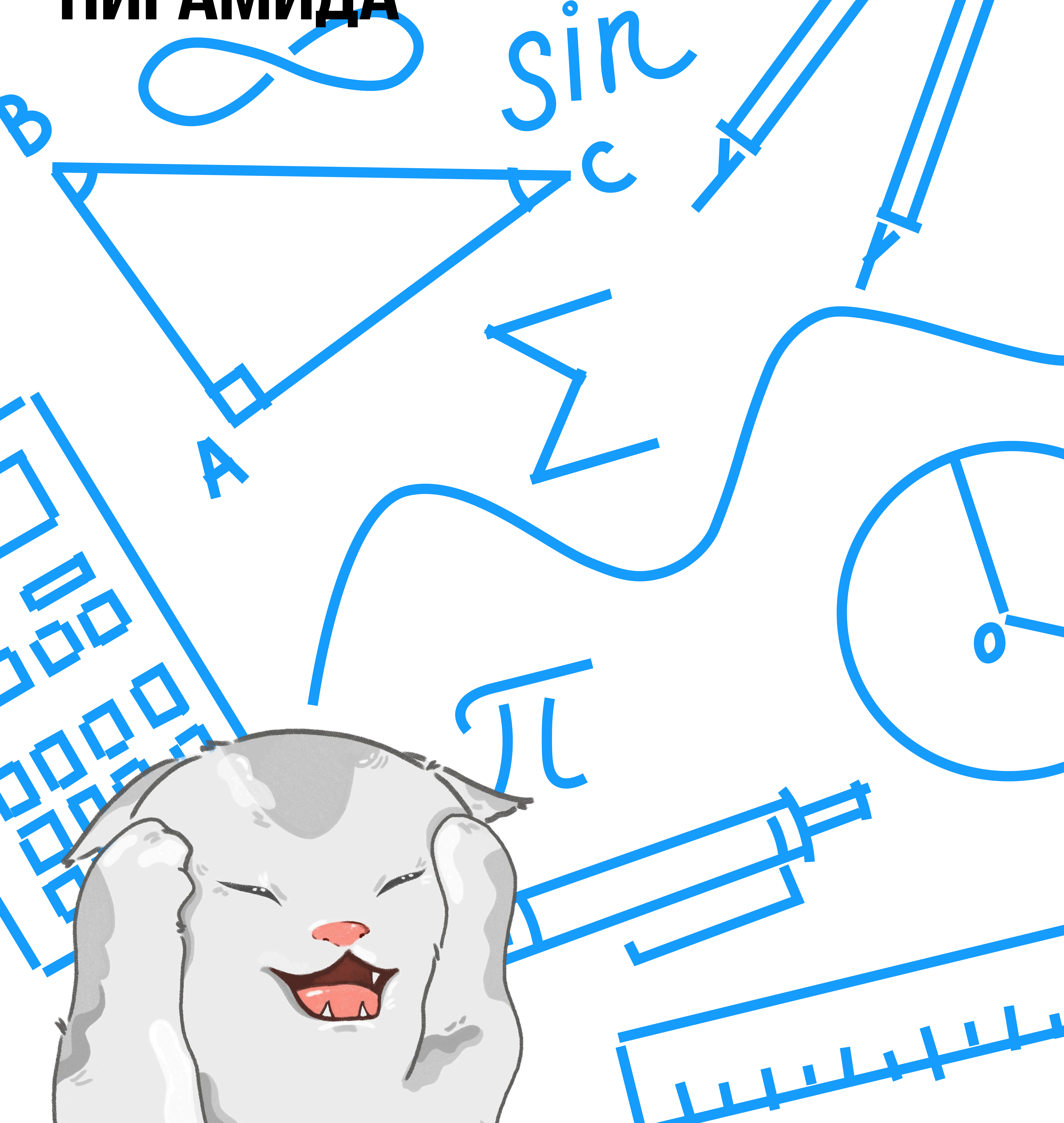
100Б

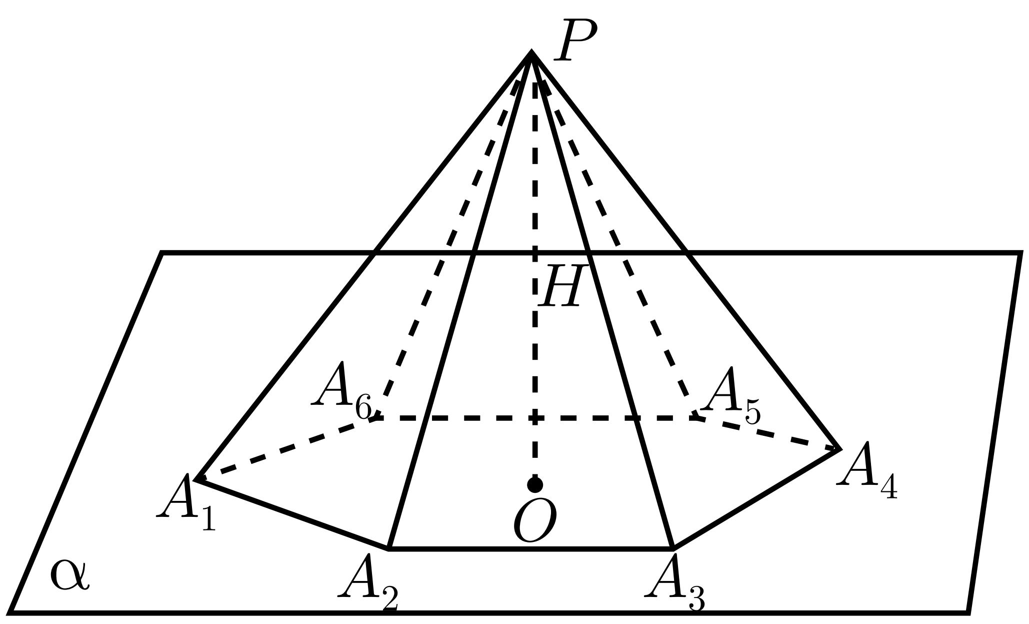
ТЕОРИЯ.

ОСНОВЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПИРАМИДА



Пирамида. Правильная пирамида. Усечённая пирамида.

Возьмём произвольную пирамиду и проведём секущую плоскость a, параллельную плоскости основания пирамиды и пересекающую боковые рёбра. Плоскость a разбивает пирамиду на два многогранника.



Определения
Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...An$ и n треугольников, называется **пирамидой**.
n-угольник $A_1A_2...An$ и n называется **основанием**, треугольники $A_1A_2P; A_2A_3P...$ — **боковыми гранями пирамиды.** Точка P называется **вершиной пирамиды**, отрезки $A_1P; A_2P; A_3P...$ — **боковыми рёбрами пирамиды.**

Треугольная пирамида называется **тетраэдром.**

Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется **высотой пирамиды.**

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т.е. основания и боковых граней), а **площадью боковой поверхности пирамиды** — сумма площадей её боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Утверждение 1. Если двугранные углы при основании пирамиды равны, то:
а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание;
б) высоты всех боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны;
в) площадь боковой поверхности пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани, проведённую в вершины.

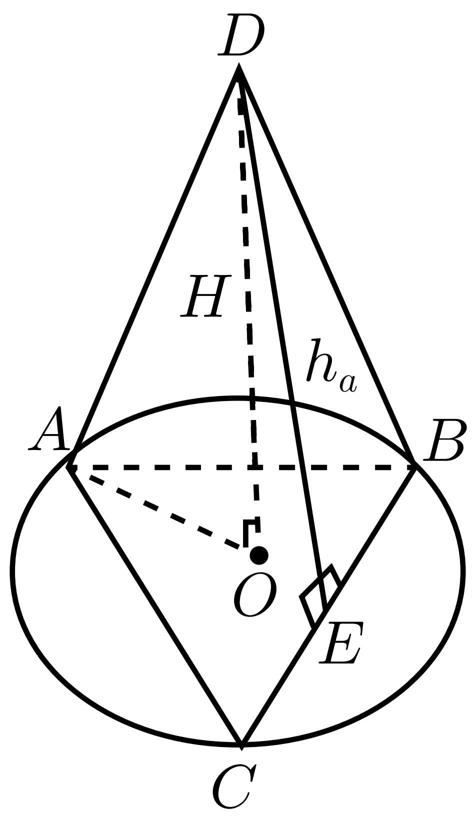
Утверждение 2. Если в пирамиде боковые рёбра равны между собой, то:
а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания;
б) все боковые грани пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.

Теорема. Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Правильная пирамида

Определения
Пирамида называется **правильной**, если её основание — **правильный многоугольник**, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её **высотой**.
Центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него или описанной около него окружности.
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой.**

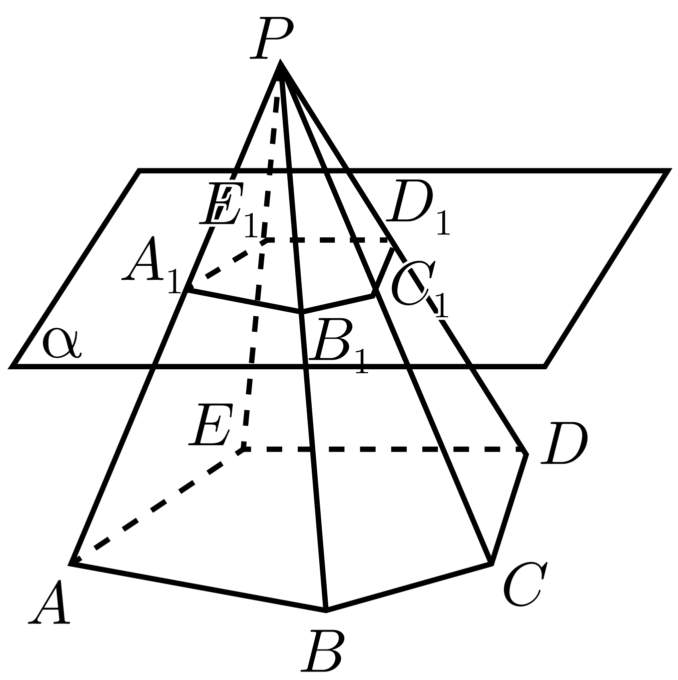


Свойства:
1. Все боковые рёбра правильной пирамиды равны.
2. Все боковые грани правильной пирамиды являются равнобедренными треугольниками.
3. Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.
4. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$S_{\text{бок. прав. пир}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_a$$

Усечённая пирамида

Возьмем произвольную пирамиду и проведём секущую плоскость a, параллельную плоскости основания пирамиды и пересекающую боковые ребра. Плоскость a разбивает пирамиду на два многогранника.



Определения
Многогранник, гранями которого являются n-угольники ABC... и $A_1B_1C_1$... (**нижнее** и **верхнее основания**), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников (**боковые грани**), называется **усечённой пирамидой**.

Отрезки AA_1; BB_1; CC_1... называются **боковыми рёбрами** усечённой пирамиды.
Боковые грани усечённой пирамиды являются **трапециями.**

Усечённая пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Основания правильной усечённой пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются **апофемами**.

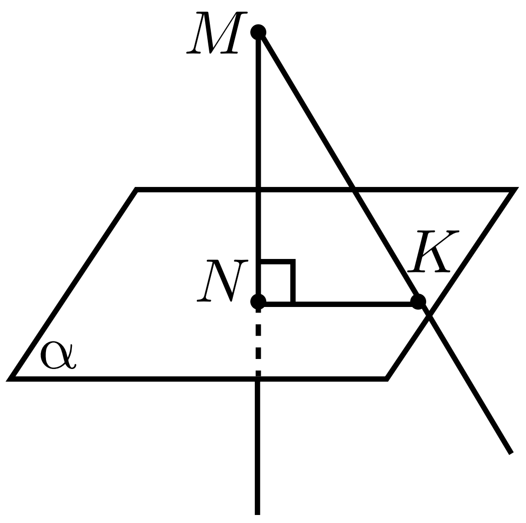
Теорема.
Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:

$$S_{\text{бок. пов. пр. ус. пир}} = \frac{P_{1\text{ осн}} + P_{2\text{ осн}}}{2} \cdot h_a$$

Объём усечённой пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле:

$$V_{\text{усеч. пир}} = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

Угол между прямой и плоскостью



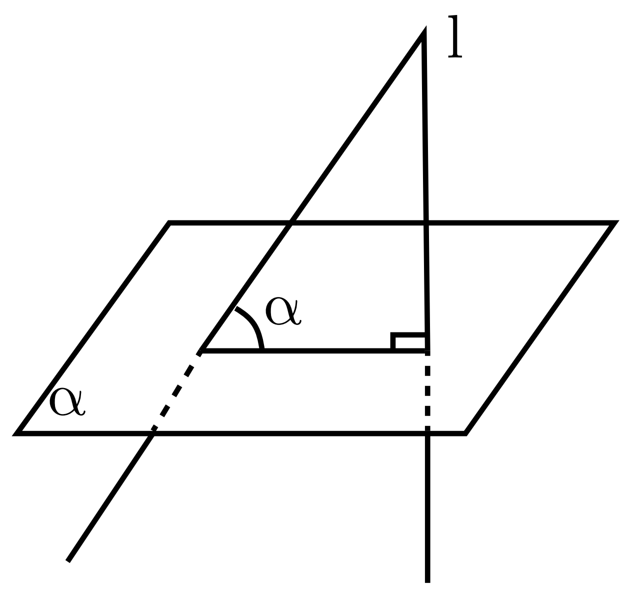
Точка $M \notin \alpha$.
Прямая $MN \perp \alpha$.
MN – перпендикуляр.
(точка N – основание перпендикуляра)
$|MN|$ – расстояние от точки M до плоскости α.

Прямая MK – наклонная.
Отрезок NK – проекция наклонной MK на плоскость α.

Свойства:
1° перпендикуляр меньше любой наклонной.
2° наклонные к плоскости равны, если равны их проекции.

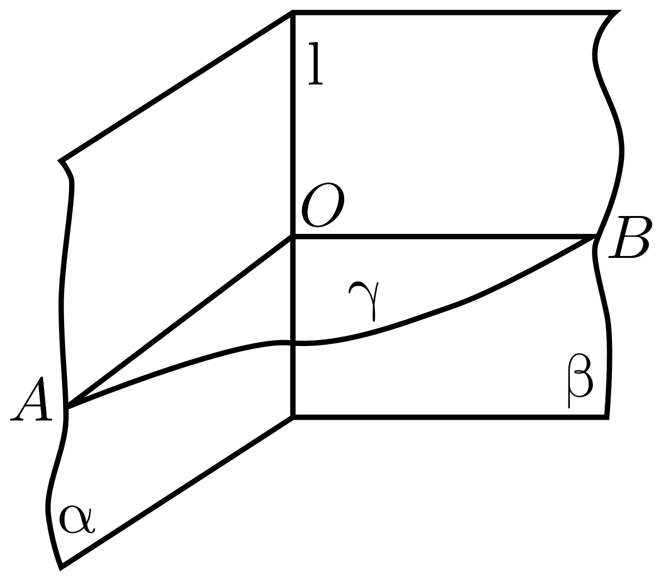
Определение. Угол между прямой и плоскостью – это угол между этой прямой и её проекцией на эту плоскость.

$(\widehat{l; \alpha}) = \alpha$
Если $l \parallel \alpha$, то $\alpha = 0^\circ$
Если $l \perp \alpha$, то $\alpha = 90^\circ$



Двугранные углы. Перпендикулярность двух плоскостей.

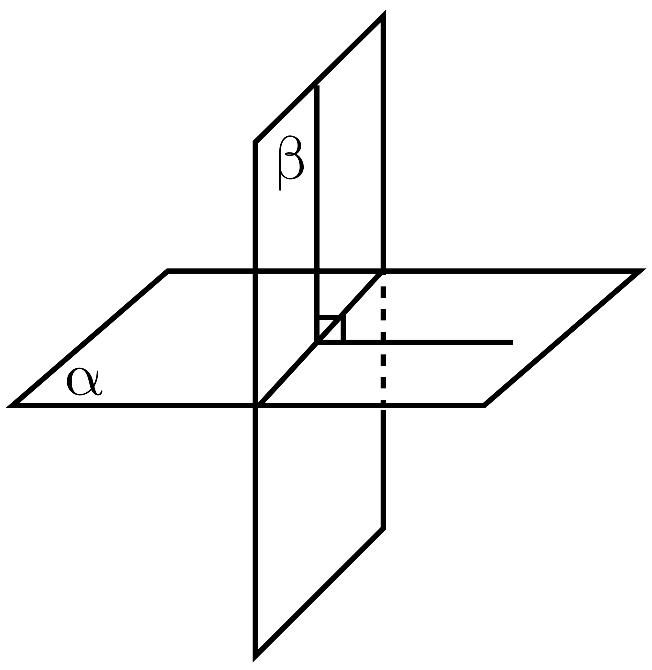
Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.



$\angle \alpha l \beta$ – двугранный угол.
$\gamma \perp l$
$\angle AOB$ – линейный угол данного двугранного угла.

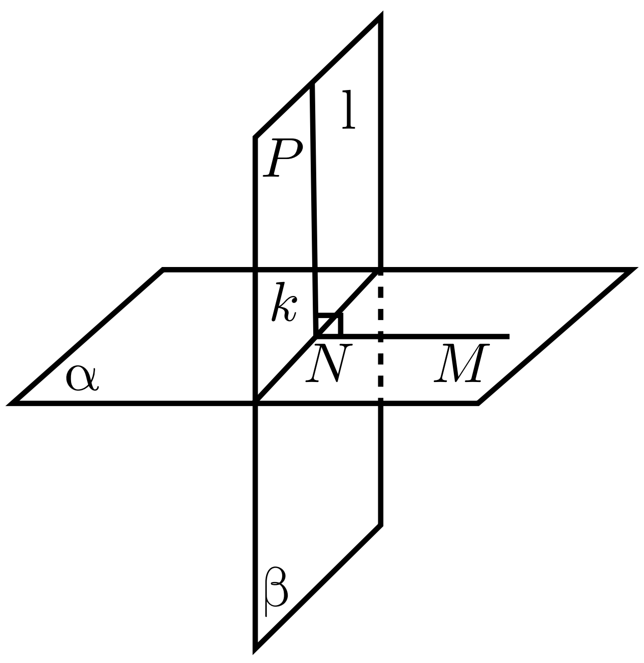
Величина двугранного угла равна величине линейного угла. Двугранные углы бывают острыми, прямыми, тупыми в зависимости от градусной меры его линейного угла.

Перпендикулярность плоскостей



Определение.
Две плоскости называются **перпендикулярными**, если они образуют прямой угол.

$\alpha \perp \beta$



Теорема (признак перпендикулярности плоскостей).
Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости будут взаимно перпендикулярными.

Дано: $l \perp \alpha, l \subset \beta$
Доказать: $\alpha \perp \beta$
Доказательство:
$\alpha \cap \beta = k$
Проведем прямую $NM \perp k$.
Линейный угол $\angle PNM = 90°$, т.к. $l \perp \alpha,\ MN \perp k$
Значит плоскости $\alpha \perp \beta$. Теорема доказана.